Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations bicarrées suivantes :

$$8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$$

$$56x^4 - 39x^2 + 4 = 0$$

$$\frac{1}{9}x^4 + \frac{14}{3}x^2 + 49 = 0$$

En procédant selon la même idée, résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation bicarrées suivante :

$$(x+2)^4 + 3(x+2)^2 - 4 = 0$$

Correction :

- *En posant* $X = x^2$, *on obtient pour la* $1^{ère}$ *équation :* $8X^2 + 10X - 12 = 0$

d'où $\Delta = 100 - 4\times 8\times(-12) = 484 = 22^2$ *ainsi on a deux racines :*

$$X_1 = \frac{-10-\sqrt{484}}{2\times 8} = -\frac{32}{16} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{-10+\sqrt{484}}{2\times 8} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Les solutions de l'équation bicarrée vérifient donc la condition $x^2 = X_1$ *et* $x^2 = X_2$

La première racine X_1 *étant négative,*

On a donc pour solution de l'équation bicarrée : $x_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ***et*** $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

- *En procédant de la même façon dans les deux équations suivantes :*

  - *On obtient pour la seconde :* $\Delta = 625 = 25^2$ *et ainsi* $X_1 = \frac{14}{112} = \frac{1}{8}$ *et*

$$X_2 = \frac{64}{112} = \frac{4}{7}$$

En remarquant que : $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

On a ainsi quatre solutions pour cette équation : $\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{2\sqrt{7}}{7};-\frac{2\sqrt{7}}{7}$

  - *On obtient pour la troisième :* $\Delta = 0$ *soit une racine double*

$$X = \frac{-\frac{14}{3}}{2\times\frac{1}{9}} = -\frac{14}{3}\times\frac{9}{2} = -21$$

Cette racine étant négative, l'équation bicarrée n'a pas de solution

- *On pose cette fois* $X=(x+2)^2$

L'équation devient : $X^2+3X-4=0$

Le discriminant donne : $\Delta=9-4\times1\times(-4)=25=5^2$ *et les deux solutions sont alors :*

$$X_1=\frac{-3-5}{2}=-4 \text{ et } X_2=\frac{-3+5}{2}=1$$

On en déduit que les solutions de l'équation de départ vérifient donc $(x+2)^2=1$ *soit deux cas possible :* $x+2=1$ *soit x =* -1 *ou* $x+2=-1$ *soit x = –3*

Les solutions de l'équation bicarrée : $(x+2)^4+3(x+2)^2-4=0$ **sont donc** -1 **et** -3